Équations différentielles

BCPST 1 — 2022/2023

Notation Dans tout ce chapitre n est un entier naturel non nul et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I — Généralités

Définition I.1 — **Équation différentielle**

On appelle ***équation différentielle d'ordre n*** *(en abrégé équation différentielle) une équation de la forme*

$$F(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y'(t), y(t), t) = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

où F est une fonction définie de $\mathbb{R}^{n+1} \times I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et y une fonction inconnue définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et n fois dérivable.

On appelle ***solution*** *de l'équation différentielle toute fonction y de classe n fois dérivable sur I vérifiant l'équation différentielle.*

Définition I.2 — **Conditions initiales**

Soit $(\mathscr{E})$ une équation différentielle d'ordre n.

On appelle ***conditions initiales*** *la donnée en un point t_0 de I des valeurs de $y(t_0)$, $y'(t_0)$, … $y^{(n-1)}(t_0)$.*

On parle aussi dans ce cas de ***conditions de Cauchy****.*

Résoudre le ***problème de Cauchy*** *c'est trouver, s'il en existe, une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ qui vérifie ces conditions initiales.*

Définition I.3 — **Équation différentielle linéaire**

On appelle ***équation différentielle linéaire d'ordre n*** *un équation de la forme*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \qquad (\mathscr{E})$$

où a_0, a_1, …, a_{n-1} et b sont $n+1$ fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que l'équation $(\mathscr{E})$ est ***homogène*** *si le second membre est nul.*

On appelle ***équation homogène associée à $(\mathscr{E})$*** *l'équation*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \qquad (\mathscr{E}_0)$$

Théorème I.4 — **Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle**

Soit $(\mathscr{E})$ une équation différentielle linéaire d'ordre n.

Son ensemble de solution S est de la forme

$$S = \{z + y_0 \text{ avec } y \in S_0\}$$

où z est une solution de $(\mathscr{E})$ et S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

II — Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 2.1 — Équation différentielle du premier ordre
On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** *toute équation différentielle du type*

$$(E) \quad : y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2 — Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' + a(x)y = 0$ est

$$S_0 = \left\{ f \quad : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & C\exp(-A(x)), \quad C \in \mathbb{R} \end{array} \right. \right\}$$

où et A une primitive de a sur l'intervalle I.

Exemple Les solutions de $y' = ky$ sur $\mathbb{R}$ peuvent s'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = y(0) \times \mathrm{e}^{-kt}$$

Recherche d'une solution particulière On applique la **méthode de variation de la constante**. Elle consiste à chercher une solution de la forme

$$y = C(x) \times \exp(-A(x))$$

On prouve que $C'(x) = b(x)\exp(A(x))$ et en intégrant cette dernière ligne on exprime la fonction C et on en déduit ensuite y.

Théorème 2.4 — Problème de Cauchy – I
Le problème de Cauchy associé à une équation linéaire du premier ordre admet une unique solution.

III — Équation différentielle linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 3.1 — Équation différentielle du second ordre
On appelle ***équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*** *toute équation différentielle de la forme*

$$(\mathscr{E}) \quad : ay'' + by' + cy = f(x)$$

où a, b et c sont trois réels fixés, avec $a \neq 0$, et f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 3.2 — **Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre**
L'équation différentielle linéaire

$$(\mathscr{E}_0) \quad : \quad ay'' + by' + cy = 0$$

admet sur $\mathbb{R}$ un ensemble de solutions S_0 qui dépend de deux paramètres réels.
Soit $aX^2 + bX + c = 0$ l'équation caractéristique de $\mathscr{E}_0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.
Si $\Delta > 0$ alors l'ensemble de solution de $\mathscr{E}_0$ s'écrit

$$S_0 = \left\{x \mapsto C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \ \text{ avec } \ C_1 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique.
Si $\Delta = 0$ alors

$$S_0 = \left\{x \mapsto C_1 x \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda x} \ \text{ avec } \ C_1 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

où λ est l'unique racine de l'équation caractéristique.
Si $\Delta < 0$ et si $\lambda_1 = \lambda + \mathrm{i}\omega$ et $\lambda_2 = \lambda - \mathrm{i}\omega$ sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique alors

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{x \mapsto (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)\mathrm{e}^{\lambda x} \ \text{ avec } \ C_1 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ C_2 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \mapsto A\cos(\omega x + \phi)\mathrm{e}^{\lambda x} \ \text{ avec } \ A \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ \phi \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

L'équation $y'' + \omega_0^2 y = 0$ définit sur $\mathbb{R}$ admet des solutions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y = A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x))$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

THÉORÈME 3.3 — **Problème de Cauchy – II**
Le problème de Cauchy associé à une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants admet une unique solution.

Ce résultat reste vrai pour des équations équation linéaire du second ordre avec second membre continu.