# Fonctions usuelles

BCPST 1 — 2022/2023

**Exercice 1**

Rendre entiers les dénominateurs des fractions suivantes.

1. $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
2. $B = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}$.
3. $C = \dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

**Exercice 2**

Simplifier les nombres suivants.

1. $A = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+3)^2}$
2. $B = \sqrt{\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^2}}$

**Exercice 3**

Soit $a$ et $b$ deux réels non nuls et de même signe.

Calculer la valeur de l'expression

$$\frac{a}{x}+\frac{x}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

pour $x = \sqrt{ab}$.

**Exercice 4**

Calculer $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ pour $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}-\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)$.

## Généralités

**Exercice 5**

1. Montrer que la composée de deux fonctions monotones de même sens (resp. de sens contraires) est croissante (resp. décroissante).
2. Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
3. La somme de deux fonctions monotones est-elle nécessairement monotone ?
4. Le produit de deux fonctions croissantes est-il nécessairement une fonction croissante ?

**Exercice 6**

Calculer les limites suivantes

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0+}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2x^2}}$.

**Exercice 7**

Déterminer les limites suivantes, en justifiant précisément.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{3x^2}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}+1}{(\ln x)^4}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}x^4e^{-\sqrt{x}}$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\exp(3x^2)}{x^6}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[3x^2+(\ln x)^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\exp(x^2)-e^{3x}+x^2\right]$
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-3x}-\dfrac{1}{x}+x+e^{x^2}\right)$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x^2+1)-2\ln x\right)$

**Exercice 8**

Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et calculer les dérivées de

1. $a : x \mapsto \ln(1+x^2)$
2. $b : x \mapsto \dfrac{2^{2x}}{x^2-1}$
3. $c : x \mapsto \exp\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
4. $d : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$

**Exercice 9**

Représenter graphiquement les fonctions suivantes.

1. $f_1 : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\begin{cases}2-x & \text{si } x\geqslant 3\\ x^2 & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$
2. $f2 : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\begin{cases}\ln x & \text{si } x\geqslant 1\\ e^x & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$

**Exercice 10**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

1. Donner l'ensemble de définition de $f$.
2. Simplifier l'expression de $f(x)$.

## Logarithmes

**Exercice 11**

Établir l'encadrement

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

**Exercice 12**

1. Montrer que

$$\forall x \in ]-1\,;\,+\infty[\,, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$$

2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

**Exercice 13**

Montrer que pour tout $a, b > 0$ , on a

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

**Exercice 14**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(x^2-4)$$

**Exercice 15**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3))$$

**Exercice 16**

Montrer que pour tout $x \in ]0\,;\,1[$, on a

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

## Puissances et exponentielles

**Exercice 17**

Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Parmi les relations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?
$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ ; $a^b a^c = a^{bc}$ ; $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$ ; $(ab)^c = a^{c/2}b^{c/2}$ ; $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$ ; $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$.

**Exercice 18**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier $a^b$ pour $a = \exp\left(x^2\right)$ et $b = \frac{1}{x}\ln(x^{1/x})$.

**Exercice 19**

Comparer $\lim\limits_{x\to 0+} x^{(x^x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0+} (x^x)^x$.

**Exercice 20**

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \;;\; \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} \;;\; \lim_{x\to 0+} x^{1/x}$$

**Exercice 21**

Montrer que

1. $\forall a \in [0\,;\,+\infty[\;\; \forall b \in [1\,;\,+\infty[ \quad (1+a)^b \geqslant 1 + ab$
2. $\forall a \in [0\,;\,+\infty[\;\; \forall b \in [0\,;1] \quad (1+a)^b \leqslant 1 + ab$

**Exercice 22**

Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1)$ : $\quad x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$
2. $(E_2)$ : $\quad \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} + 1$
3. $(E_3)$ : $\quad \left(x^2\right)^x = x^{(x^2)}$ ;
4. $(E_4)$ : $\quad (x^2)^x = x^{(x^2)}$.
5. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

**Exercice 23**

Résoudre les systèmes réels suivants :

1. $(S_1)$ : $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$
2. $(S_2)$ : $\begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases}$
3. $(S_3)$ : $\begin{cases} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$

**Exercice 24**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle $x$

1. $(E_1) : (\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$
2. $(E_2) : \ln x + \ln(5-x) = -2$
3. $(E_3) : \sqrt{x^2-3} = 5x - 9$
4. $(E_4) : x = \sqrt{x} + 2$
5. $(E_5) : \mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x - 1 = 0$
6. $(E_6) : \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2$
7. $(E_7) : \mathrm{e}^{2x-2} + \mathrm{e}^{x+1} - 2\mathrm{e}^4 = 0$
8. $(E_8) : \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1$
9. $(E_9) : \sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$

**Exercice 25**

Discuter et résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels $a$, $b$ et $c$, l'équation d'inconnue réelle $x$

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$$

**Exercice 26**

Résoudre avec $x \in \mathbb{R}$

1. $(I_1) : 5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 10^{-10}$
2. $(I_2) : \ln(3x+1) \leqslant \ln(2x-1)$
3. $(I_3) : \sqrt{x+5} \geqslant \sqrt{x^2-4}$

**Exercice 27**

Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre réel $m$ l'équation

$$(m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0$$

**Exercice 28**

Résoudre l'équation d'inconnue réelle $x$

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$$

## Trigonométrie

**Exercice 29**

En vous aidant des symétries observables sur le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes.

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
2. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
4. $\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)$

**Exercice 30**

En utilisant les formules d'addition, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 31**

Calculer

$$1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3}.$$

**Exercice 32**

Déterminer le cosinus et le sinus de chacun des réels suivants.

$$a = \frac{213\pi}{4} \qquad b = \frac{2132\pi}{3} \qquad c = -\frac{1285\pi}{2} \qquad d = \frac{687\pi}{6}$$

**Exercice 33**

Soit $\alpha$ un réel tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Calculer $\sin\alpha$.

**Exercice 34**

Simplifier

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos(5\pi - x) + \sin^2(\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

**Exercice 35**

Simplifier

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

**Exercice 36**

Tracer la courbe de la fonction $f$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin x + |\sin x|}{2}$$

**Exercice 37**

Résoudre les équations d'inconnue réelle $x$

1. $(E_1)$ : $\cos 3x - \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
2. $(E_2)$ : $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos x$ ;
3. $(E_3)$ : $\sqrt{3}\cos x + \sin x > 1$.

**Exercice 38**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$$

**Exercice 39**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $\cos(4x)$ en l'exprimant comme un polynôme en $\cos(x)$.

**Exercice 40**

1. Représenter le graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x - \sin x = 1$.
3. Résoudre sur $[\,0\,;\,2\pi\,]$ l'inéquation $\cos x > \sin x$.

**Exercice 41**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnues $x$ et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $(E_1)$ : $4\cos^2 x = 1$
2. $(E_2)$ : $4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\sin^2 x = 9\sin x$
3. $(E_3)$ : $2\sin^2 x = 3(1+\cos x)$
4. $(E_4)$ : $2\sin^2(3x) + 1 = \cos(3x)$
5. $(E_5)$ : $2\cos^3 x + 7\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$
6. $(E_6)$ : $\cos(4x) = 6 + 13\cos 2x$
7. $(E_7)$ : $\sin(3x) = \cos x$
8. $(E_8)$ : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin(2x)$
9. $(E_9)$ : $\cos x - \sin x = \frac{1}{2\cos x}$
10. $(E_{10})$ : $\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 2x} = 3$
11. $(E_{11})$ : $\tan^2 x - \sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)\tan x$
12. $(E_{12})$ : $3\tan^3 x - 3\tan^2 x - \tan x + 1 = 0$

**Exercice 42**

Soit $x$ dans $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Calculer $\cos(4x)$ puis $x$.

**Exercice 43**

1. Pour $x$ réel distinct de $\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1-\sqrt{3})\cos x = (1+\sqrt{3})(1-\sin x)$$

**Exercice 44**

À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation sur l'intervalle $I$ donné :

1. $(I_1) : 2\cos x + 1 \geqslant 0$ sur $I = [-\pi\ ;\ \pi]$
2. $(I_2) : 2\cos x + 1 > 0$ sur $I = [0\ ;\ 2\pi]$
3. $(I_3) : 4\sin^2 x + 8\sin x + 3 \leqslant 0$ sur $I = [-\pi\ ;\ \pi]$
4. $(I_4) : 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 < 0$ sur $I = [-\pi\ ;\ 2\pi]$
5. $(I_5) : \sqrt{3}\tan x - 1 \leqslant 0$ sur $I = ]-\pi/2\ ;\ \pi/2[$
6. $(I_6) : \sqrt{3}\tan x - 1 \leqslant 0$ sur $I = [-\pi\ ;\ \pi]$

**Exercice 45**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes où $x$ est l'inconnue et $\alpha$ un paramètre réel.

1. $(E_1) : \quad x\sin\alpha + \cos(2\alpha) = 1$
2. $(E_2) : \quad 2x^2 - 2(\cos\alpha + \sin\alpha)\,x + \sin(2\alpha) = 0$
3. $(E_3) : \quad (x\sin\alpha\cos\alpha)^2 = x - 1$
4. $(E_4) : \quad x^2\sin\alpha - x\cos^2\alpha - \sin\alpha = 0$

**Exercice 46**

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1+\tan x}{1-2\cos^2 x}$
2. $g(x) = \sqrt{1+2\sin x}$
3. $h(x) = \sqrt{2\cos^2 - 1}$

**Exercice 47**

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. l'équation $\sqrt{1+\dfrac{1}{2}\sin x} = \cos x$ ;
2. l'inéquation $\sqrt{1+\dfrac{1}{2}\sin x} < \cos x$ (on limitera d'abord l'étude à $]-\pi\ ;\ \pi[$ ;