Équations différentielles

BCPST 1 — 2022/2023

Pratique : premier ordre

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles avec second membre suivantes :

1. $y' + y = 1$;
2. $y' + y = \exp(mx)$ (avec $m \in \mathbb{R}$) ;
3. $y' + y = \cos(nx)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) ;
4. $y' + y = \cos^2 x$.

Exercice 2 — *Exemple de raccord*

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0\,;\,1[$, puis sur $]1\,;\,+\infty[$:

$$(x \ln x)y' - y = 0$$

2. Préciser les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Discuter les solutions du problème de Cauchy :

$$(x \ln x)y' - y = 0 \qquad \text{et} \qquad y(x_0) = y_0$$

Que pouvez-vous dire de la condition initiale $y(1) = 0$?

Exercice 3

Intégrer les équations différentielles

1. $y' + \cos(x)y = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$;
2. $y' + \dfrac{1}{x \ln x} y = 0$ pour $x \in]1\,;\,+\infty[$;
3. $y' + \cos^3(x)y = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Intégrer les équations différentielles suivantes, pour $x \in \mathbb{R}$

1. $y' + y = \cos x + \sin x$;
2. $y' + 2y = \cos x$;
3. $y' + xy = x + 1$;
4. $xy' + (x-2)y = (x-2)$;
5. $y' + y = \sin x$;
6. $y' - \mathrm{e}^x y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$;
7. $y' + \dfrac{2y}{x^2+1} = \exp(-2\operatorname{Arctan}(x))$.

Exercice 5

Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $y' - y\tan x = 0$ avec $y(0) = 1$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$;
2. $y' - 1/(x \ln x)y = 0$ avec $y(1/\mathrm{e}) = 1$, sur $]0\,;\,1[$;
3. $y' + xy = 2x$ avec $y(0) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes, sur $\mathbb{R}$,

1. $y' - y = \mathrm{e}^{2t}$;
2. $y' - y = \mathrm{e}^t$;
3. $y' - y = t\mathrm{e}^t$.
4. $y' + 2y = 1$ sous la condition initiale $y(0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ donné.
5. $y' + y = 3\sin t$ avec la même condition initiale.

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles avec les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donné.

1. $y' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^t$
2. $y'' + 6y' + 13y = 169t$.

Exercice 8

En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ pour $x \in \mathbb{R}$;
2. $xy' + y = \mathrm{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$;
3. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9

Intégrer les équations différentielles, sous la condition initiale $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donnés, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$;
2. $(1+x^2)y' + xy = x$.

Exercice 10

On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $x^2y' - y = x^2 - x + 1$.

1. Montrer que (E) admet comme solution particulière une fonction polynomiale.
2. Résoudre (E) pour $x > 0$.

Exercice 11

Solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - y = x^2\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$

Pratique : second ordre

Exercice 12

1. Calculer les fonctions y_1 et y_2 déterminées par

$$\begin{cases} y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0 \\ \qquad\qquad \text{avec } y_1(0) = 1 \text{ et } y_1'(0) = 2, \\ y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 0 \\ \qquad\qquad \text{avec } y_2(0) = 1 \text{ et } y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Démontrer que (y_1, y_2) forme une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.
3. Ce résultat est-il encore valable si on prend comme conditions initiales :

$$y_1(0) = 1, \;\; y_1'(0) = 0, \;\; \text{et} \;\; y_2(0) = 0, \;\; y_2'(0) = 1$$

4. Et avec les conditions suivantes ?

$$y_1(0) = 1, \;\; y_1(1) = \mathrm{e}, \;\; \text{et} \;\; y_2(0) = 1, \;\; y_2(1) = \mathrm{e}^2$$

Exercice 13

Intégrer les équations différentielles

1. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + x + 1$;
2. $y'' - y' = x^2$;
3. $y'' = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$;
4. $y'' - 2y' + y = x^2$.
5. $y'' + 4y' + 4y = -\mathrm{e}^x$;
6. $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}$.
7. $y'' - my' + y = 0$ pour $m \in \mathbb{R}$;
8. $y'' - (a + \overline{a})y' + |a|^2 y = 0$ pour $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 14

Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^x$ avec $y(0) = 1 \;\; y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{2x}$ avec $y(0) = 0 \;\; y'(0) = 1$.

Exercice 15

On considère un paramètre réel m. Résoudre l'équation différentielle suivante, en discutant selon les valeurs de m :

$$y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

Exercice 16

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes ($\omega > 0$)

1. $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-t}$;
2. $y'' + \omega^2 y = -2$;
3. $4y'' + 4y' + y = \cos 2t$.

Exercice 17

Déterminer la solution générale des équations différentielles

1. $y'' - 2y' + y = t^2 + \mathrm{e}^{2t}$;
2. $y'' - 2y' + 2y = 25\, t\mathrm{e}^{-t} + 4$.

Exercice 18

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = x^2 + \mathrm{e}^{-x}\cos x + \mathrm{e}^{-3x}$.

Exercice 19

Intégrer les équations différentielles

1. $y'' + y' - 6y = x\mathrm{e}^x$;
2. $y'' + y' - 6y = (2x+1)\mathrm{e}^{2x}$;
3. $y'' - 4y' + 4y = (x+3)\mathrm{e}^{-x}$;
4. $y'' - 4y' + 4y = (2x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 20

Intégrer les équations différentielles

1. $y'' - 3y' + 2y = \cos x$;
2. $y'' - 4y' + y = \mathrm{e}^x \cos x$;
3. $y'' - 2y' + 2y = 2\mathrm{e}^x \sin x$;
4. $y'' + 3y = \cos^3 x$.

Usage de la Force

Exercice 21

Trouver toutes les applications f définies et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 22

On considère un paramètre réel m. Résoudre l'équation différentielle suivante, en discutant selon les valeurs de m :

$$y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

Exercice 23

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 6y' + 9y = x^2 + \mathrm{e}^{-x}\cos x + \mathrm{e}^{-3x}$$

Exercice 24

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) = \mathrm{e}^t \\ x(t) - y'(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

★ **Exercice 25**

On cherche à résoudre l'é.d.

$$(1+x)y''-2y'+(1-x)y = xe^{-x}$$

1. Vérifier que la fonction exponentielle est solution de l'équation homogène associée, puis la résoudre en utilisant la méthode de la variation de la constante.
2. Chercher une solution particulière de l'équation par la méthode habituelle.

Exercice 26

Trouver toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x)$$

Exercice 27

Soit $a > 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $y' = \dfrac{y}{x} + x^a$.

Étudier la limite en 0 des solutions.

Exercice 28

Trouver les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions : $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - f(x) = |x|$$

Exercice 29

On considère l'équation différentielle

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$$

Solutions sur $\mathbb{R}_+^*$? Sur $\mathbb{R}_-^*$? Sur $\mathbb{R}$?

Changement de variables

Exercice 30

Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en posant $x = e^t$ et en cherchant une équation différentielle vérifiée par $z(t) = y(e^t)$.

Exercice 31

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $x^2y'' + y = 0$.

On pourra utiliser la méthode de l'exercice 30.

En déduire l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall x > 0,\ f'(x) = f(1/x)$.

Exercice 32

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ en posant $z = x^2y$.

Exercice 33

Résoudre l'équation différentielle $y'y = 1$.

Exercice 34

Résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

On pourra poser $z = y'' - y$.

★ **Exercice 35**

Soit $(\lambda, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Trouver toutes les fonctions f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = kf(\lambda - x) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

Exercice 36

Soit m un réel. On considère l'équation différentielle $(E) : mxy' - y = y^2 - x^2$

1. Donner une condition sur m pour qu'il existe un solution polynomiale, notée y_0.
2. On suppose ici $m = 1$. On cherche les solutions de (E) de la forme $y = y_0 + \dfrac{1}{z}$. Déterminer une équation différentielle (E') simple vérifiée par z.
3. Résoudre (E'), en déduire les solutions de (E).

Quelques applications

Exercice 37

On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe Ox sur le plan incliné (faire une figure).

1. Déterminer l'abscisse x_0 du point M à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, k et a
2. À partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale. Établir l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d, k, m et x_0.
3. À partir de la position d'équilibre, on donne une pichenette à M qui lui communique une vitesse initiale v_0. Établir, en minimisant les calculs supplémentaires, l'équation horaire $x(t)$ en fonction de v_0, k, m et x_0.

Exercice 38 — *Datation au carbone 14*

Un organisme vivant contient du carbone 12, du carbone 13 et du carbone 14 dans les mêmes proportions que dans le dioxyde de carbone atmosphérique. Après la mort de l'organisme, les quantités de carbone 12 et

13 restent fixes, tandis que le carbone 14 subit une désintégration radioactive dite β (un atome de carbone 14 donne un atome d'azote (14) plus un électron). Le nombre de désintégrations par unité de temps est proportionnel à la quantité d'atomes de carbone 14 présents.

1. Déterminer la loi de la quantité de carbone 14 en fonction du temps à partir de la mort de l'organisme (en fonction de la quantité initiale et d'une constante).
2. Un bois fossile trouvé en Ouzbékistan subit 305 désintégrations en 12 heures, tandis qu'un fossile actuel de même poids en subit 19520 en 12 heures. Sachant que la période de demi-vie (temps pendant lequel la moitié du carbone 14 se désintègre) est de 5730 ans, déterminer l'âge du fossile.

Exercice 39

On plonge une cellule dans une solution de potassium, de concentration c_0 fixée. Le principe de Fick sur la diffusion passive à travers la membrane cellulaire affirme que la vitesse à laquelle la concentration change est proportionnelle au gradient de concentration $c_0 - c(t)$, où $c(t)$ désigne la concentration de la solution à l'intérieur de la cellule au moment t. Déterminer $c(t)$ sachant que $c(0) = 0$.

Exercices de concours

Exercice 40 *(INA 04)*

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' - y' + y = 0. \qquad (E_1)$$
2. On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que
$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x). \qquad (E_2)$$
   a) On pose $g(t) = f(\mathrm{e}^t)$. Montrer que g est solution de (E_1).
   b) Trouver toutes les fonctions f vérifiant (E_2).

Exercice 41 *(INA 06)*

1. Soit u une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, vérifiant $u(0) = -u(1) = 1$. Calculer
$$\int_0^1 \big(u''(t) + \pi^2 u(t)\big)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Trouver les valeurs de b telles que le système
$$\begin{cases} u''(t) + \pi^2 u(t) = -b\sin(\pi t) \\ u(0) = -u(1) = 1 \end{cases}$$
ait au moins une solution. Le résoudre alors.
3. Même question avec
$$\begin{cases} u''(t) + \pi^2 u(t) = -b\sin(\pi t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Exercice 42 *(INA 06)*

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les fonctions de $\mathscr{S}$ sont deux fois dérivables.
2. Montrer que si f est dans $\mathscr{S}$, alors f est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire, à coefficients constants.
3. Déterminer $\mathscr{S}$.

Exercice 43 *(INA 07)*

1. a) Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ qui vérifient
$$\forall x > 0,\ xf'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$
   b) Déterminer de même toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ qui vérifient
$$\forall x < 0,\ xf'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$
2. Montrer qu'il existe une unique fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$
   On précisera en particulier $f'(0)$.
3. f étant la fonction trouvée à la question précédente, calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 44 *(INA 07)*

On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et de classe C^1, vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) + f(-x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x$.

1. Montrer qu'un tel f est de classe C^2 et vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
2. Trouver les fonctions recherchées.