Applications linéaires

BCPST 1 — 2022/2023

Exercice 1

Justifier que les applications suivantes sont linéaires, calculer leur image et noyau :

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, x+y) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3y, x-y, x+2y) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y, x, 5y) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y-z, \\ & & -2x-3y+z, \\ & & 4x+6y-2z) \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-y, 2x+z, x-2z) \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z)+xX+(y-z)X^2 \end{array}$
7. $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x+2y-z, 2x+z) \end{array}$.
8. $f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z, x-y, y+z) \end{array}$
9. $f_9 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, 2x-3y+z) \end{array}$

Exercice 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{F}$ une famille finie d'éléments de E.

1. Montrer que si $\mathscr{F}$ est liée, $u(\mathscr{F})$ est liée. Donner la contraposée de cette implication.
2. Montrer que si $\mathscr{F}$ est génératrice (de E), $u(\mathscr{F})$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$.

Exercice 3

Soit E un e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f vérifie l'équation $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f est inversible et donner l'expression de f^{-1} en fonction de f et de Id_E.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe deux réels α_n et β_n tels que $f^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}_E$.
   Quelle relation de récurrence vérifient les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. En déduire l'expression de f^n en fonction de f, de Id_E et de n.
4. Donner enfin l'expression de f^{-n} en fonction de f et de Id_E.

Exercice 4 — *Très utile*

Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que
   $$\exists g \in \mathscr{L}(E), \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$
   Démontrer que f est injective. En déduire qu'elle est bijective.
2. On suppose que
   $$\exists g \in \mathscr{L}(E), \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_E$$
   Que peut-on dire de f ? Justifier votre réponse.
3. Donner un énoncé similaire à propos des matrices carrées.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit f un endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de f.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et en donner une base.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ et en donner une base.
4. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
5. Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de E. Trouver l'image par f^2 des vecteurs de cette base.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^4$, montrer *sans aucun calcul* que l'ensemble E des $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant que $x + 3y - 2z - 5t = 0$ et $x + 2y + z - t = 0$ est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension.

Exercice 7 — *Vrai ou faux ?*

Soit f est une application linéaire d'un e.v. E dans un e.v. F

1. si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre ;
2. si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre ;
3. si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est génératrice de E alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F ;
4. si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est génératrice de E ;

5. si $\operatorname{Im} f = F$ alors f est injective ;
6. si $\operatorname{Im} f = F$ et $\dim F = \dim E$ alors f est injective ;
7. si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ alors $f = g$ (avec g une autre application linéaire de E dans F).

Exercice 8

Donner un exemple d'endomorphisme f tel que

1. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$;
2. $\operatorname{Ker} f$ inclus strictement dans $\operatorname{Im} f$;
3. $\operatorname{Im} f$ inclus strictement dans $\operatorname{Ker} f$;
4. $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel et $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$.
Montrer que $f\left\langle \operatorname{Ker}(g \circ f)\right\rangle = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 10

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $E = \mathbb{K}^3$ et λ un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \qquad f(e_2) = e_1 - e_2 \qquad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définit un endomorphisme de E. Comment choisir λ pour que f soit injective ? surjective ?

Exercice 11

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f^3 = f^2 + f + \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est bijective.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$, g non nulle, telle que $f \circ g = 0$ ou $g \circ f = 0$. Montrer que ni f ni g ne sont bijectives.
3. Soit f un endomorphisme de E vérifiant une relation polynomiale de la forme

   $$f^n = a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

   avec $a_{n-1} \neq 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.

Exercice 12

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que

1. f est injective ssi l'image de toute famille libre de E est une famille libre de F ;
2. f est surjective ssi l'image de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F ;
3. f est bijective ssi l'image de toute base de E est une base de F.

★ **Exercice 13**

Soit $E = \mathbb{K}^n$ et f un endomorphisme de E tel que $\forall u \in E, (u, f(u))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie.

Exercice 14

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
2. Montrer que si, de plus, g est injective, alors $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
3. Donner une condition suffisante pour que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

Exercice 15

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 16

Soit $E = \mathbb{K}^n$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$ et $N_k = \operatorname{Ker}(f^k)$.

1. Montrer que $I_{k+1} \subset I_k$ et $N_k \subset N_{k+1}$.
2. Montrer que $(\dim I_{k+1})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'entiers. Prouver que cette suite converge.
3. En déduire qu'à partir d'un certain rang $I_{k+1} = I_k$ et $N_{k+1} = N_k$.
4. *(difficile)* Montrer que $I_n = I_{n+1}$ et $N_n = N_{n+1}$, où n est la dimension de E.

Exercice 17

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x + 3y, -\frac{1}{2}x + 2y\right).$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Chercher deux v_1 et v_2 non nuls tels que

   $$f(v_1) = \frac{1}{2} v_1 \qquad \text{et} \qquad f(v_2) = v_2$$

3. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Donner, avec toutes les justifications nécessaires, une base de $\operatorname{Im} f$. Que peut-on dire de f ?
5. Dans la suite de cet exercice, on considère $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).
   Déterminer $f^n(v_1)$ et $f^n(v_2)$.
6. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
   a) Exprimer e_1 en fonction de v_1 et v_2 et faire de même pour e_2.

b) En déduire $f^n(e_1)$ et $f^n(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2, puis $f^n(x,y)$ pour (x,y) quelconque dans $\mathbb{R}^2$.

7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par $x_0=1$ et $y_0=1$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \ x_{k+1}=-\frac{1}{2}x_k+3y_k \text{ et } y_{k+1}=-\frac{1}{2}x_k+2y_k$$

a) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(x_n,y_n)$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=f^n(u_0)$.

b) En déduire l'expression de u_n puis celle de x_n et y_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Utilisation des matrices

Exercice 18

En cas de baisse d'activité dans la classe, on sera amené à inverser la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}-2&1&3&1&-2\\-2&-2&1&3&1\\1&-2&-2&1&3\\3&1&-2&-2&1\\1&3&1&-2&-2\end{pmatrix}$$

Exercice 19

Soit $E=\mathbb{R}^3$ et $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u^2\neq 0$ et $u^3=0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Indication : *Partir d'un vecteur e tel que $u^2(e)\neq 0$.*

Exercice 20

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes (on a le droit de réfléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&0&1&0\\0&1&2&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$$

Exercice 21

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer que l'on peut trouver deux matrices $A\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M=AB$.
2. *Application* Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2=0$.

Exercice 22

Donner le rang de $M=\begin{pmatrix}1&1&1-m\\1+m&-1&2\\2&-m&3\end{pmatrix}$, où $m\in\mathbb{R}$.

Exercice 23

Trouver les noyaux et images des endomorphismes représentés dans les bases canoniques par les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&1&5\\-1&2&3&-4\\3&0&5&6\end{pmatrix}$$

Exercice 24

Pour chacune des matrices suivantes, donner son rang, puis donner une base du noyau et une base de l'image de l'endormorphisme canoniquement associé.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-3&1&4\\-3&4&7\end{pmatrix};\qquad D=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix}-3&4&0\\-2&4&7\\1&0&-7\\-1&4&0\end{pmatrix}.$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}4&2&0\\1&2&-3\\10&0&12\end{pmatrix};$$

Exercice 25

Déterminer le rang de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&4&3&5\\3&1&5&3\\-1&5&2&8\end{pmatrix}$.

Exercice 26

Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base d'un $\mathbb{K}$–e.v. E, $f\in\mathscr{L}(E)$ avec $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}$.

Quelle est la matrice de f dans $\mathscr{C}$?

1. si $\mathscr{C}=(e_2,e_3,e_1)$;
2. si $\mathscr{C}=(e_1+e_2,e_3,e_1)$;
3. si $\mathscr{C}=(e_1-2e_2,e_3,e_1+e_2+e_3)$.

Exercice 27

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathscr{U} = (e_1, e_2, e_2 + e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans $\mathscr{B}$ par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{U}$.

Exercice 28

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $((1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1))$.

Exercice 29

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.
2. Même question avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 30

1. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -2e_2 + 6e_3$.
   A) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
   B) Déterminer le rang de f, une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 31

Pour deux entiers naturels non nuls i et j, on note δ_{ij} le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j \quad \text{et} \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{sinon}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in (\llbracket 1\,;\,n \rrbracket)^2$. On note E_{ij} la matrice $(\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

1. Écrire les matrice E_{ij} pour $n = 2$. Les reconnaitre.
2. Dans le cas général, calculer $E_{ij}E_{kl}$ avec $(i,j,k,l) \in (\llbracket 1\,;\,n \rrbracket)^4$ (on pourra utiliser la formule générale de multiplication des matrices).
3. Montrer que $I_n + E_{ij}$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 32

On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) les vecteurs $i = (-1, 0, -1)$, $j = (2, 1, 0)$, $k = (0, -1, 1)$ et on définit les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \begin{pmatrix} n & n & 0 \end{pmatrix}^T \quad C_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

1. Donner la matrice P de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base (i, j, k) et calculer son inverse. Calculer la matrice J définie par: $J = P^{-1}AP$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies par :

$$u_0 = 1 \quad v_0 = w_0 = 0$$
$$u_{n+1} = 4u_n - 4v_n - 4w_n + n + 1$$
$$v_{n+1} = v_n - w_n + 1$$
$$w_{n+1} = u_n - v_n - w_n$$

   Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}^T$ et on définit la matrice Y_n par la relation $Y_n = P^{-1}X_n - P^{-1}F_n$.
   A) Calculer Y_0.
   B) Vérifier que $F_{n+1} = AF_n + C_n$
   C) Exprimer, pour tout entier naturel n, X_{n+1} en fonction de X_n, de A et de C_n.
   D) Montrer que $Y_{n+1} = JY_n$, puis calculer Y_n en fonction de n seulement.
3. Donner, pour tout entier naturel n, les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.